

齿轮-转子-滚动轴承传动系统的弯扭耦合振动

李朝峰¹, 周世华¹, 刘文明², 任朝晖¹, 闻邦椿¹

(1. 东北大学 机械工程与自动化学院, 沈阳 110819;

2. 沈阳鼓风机集团有限公司 透平设计院, 沈阳 110869)

摘 要: 考虑齿轮啮合及扭转作用, 建立齿轮-转子-滚动轴承传动系统的弯扭耦合非线性动力学模型. 考虑输入/输出端、齿轮轴的弯曲/扭转振动等问题, 推导了不平衡齿轮-转子-滚动轴承弯扭耦合的动力学微分方程. 在考虑齿轮偏心和滚动轴承非线性接触特性的情况下, 分析了转速、偏心量以及轴承游隙等参数对系统振动响应的影响规律. 研究发现: 由于弯扭耦合的作用, 在主动轴中有着非常明显的从动轴转频成分. 而在扭转振动中则各轴转频和啮合频率表现得更为清晰; 滚动轴承有其自身的谐振频率, 在系统设计阶段需要注意避开滚动轴承的变刚度频率对系统的影响; 随着齿轮偏心量的变化对系统的时域和频域响应也有着很大的影响. 另外, 轴承游隙对系统的振动响应也有着较大影响, 应选择合适的轴承游隙, 以减小系统各处的振动幅值.

关 键 词: 齿轮-转子; 弯扭耦合; 啮合频率; 接触; 振动响应

中图分类号: V231; TH132.41

文献标志码: A

Vibration of bending-torsion coupling gear-rotor-rolling bearing transmission system

LI Chao-feng¹, ZHOU Shi-hua¹, LIU Wen-ming²,

REN Zhao-hui¹, WEN Bang-chun¹

(1. School of Mechanical Engineering and Automation,
Northeastern University, Shenyang 110819, China;

2. The Turbine Design Institute,

Shenyang Blower Works Group Corporation, Shenyang 110869, China)

Abstract: A nonlinear dynamic model of bending-torsion coupling for gear-rotor-rolling bearing transmission system was established, with consideration of the gear meshing, torsion effect, input/output, and bending/torsion vibration of gear shaft. The dynamic differential equation was deduced based on the imbalanced gear-rotor-rolling bearing of bending-torsion coupling. Considering the gear eccentricity and nonlinear contact of rolling bearing, the influence law of parameters, including the speed, eccentric distance and bearing clearance, etc, on the system vibration response was analyzed. Result show that, an obvious component of rotational frequency of driven shaft existed in the driving shaft, due to the effects of bending-torsion coupling. However, the frequency of every rotation and engagement of shaft was more obvious in the torsional vibration. Given the rolling bearing's own resonance frequency, the effect of the variable stiffness frequency of rolling bearings on the system should be avoided during the system design. The change of gear eccentric distance also affects the time and frequency response of system. Besides, the bearing clearance also affects vibration re-

收稿日期: 2013-04-18

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金(51105063); 中央高校基本科研业务费专项资金(N120403004)

作者简介: 李朝峰(1980—), 男, 河南洛阳人, 副教授, 博士, 主要从事叶片-转子动力学及机械产品动态优化设计方面研究.

sponse of the system. So a suitable bearing clearance is suggested to reduce the vibration amplitude of every part of system.

Key words: gear-rotor; bending-torsion coupling; meshing frequency; contact; vibration response

齿轮传动系统是一个包含齿轮副、传动轴、齿轮盘、支承轴承等部件的复杂结构系统,这类旋转结构,由于齿轮啮合的作用,其振动特性与简单的旋转系统有着较大的区别.近年来,国内外学者对齿轮-转子系统的动力学特性做了大量的研究和实验,也都取得了一些显著的成就^[1-13].文献[1-2]在齿轮动力学模型的基础上,采用齿轮-转子系统的扭转振动模型,对齿轮啮合力、动载系数及修缘参数进行了考察研究.唐增宝等^[3]建立系统的振动数学模型和运动微分方程,研究了由齿轮、转轴和轴承所组成的齿轮传动系统的扭转振动和横向振动,并通过齿轮动载系数和振动加速度方均根的计算,对系统做了动态分析.文献[4]建立了系统的扭转振动和弯曲振动模型,分析了齿轮传动系统的临界转速和稳定性等.文献[5]研究了由于齿轮质量偏心引起的简单齿轮系统的弯扭耦合振动响应.文献[6]基于转子动力学和齿轮啮合的基本原理,建立了一般齿轮轴系弯扭耦合振动方程,并对某型压缩机齿轮-转子系统进行了详细的动力学分析,提出了改进该类压缩机转子系统设计的具体建议.文献[7]根据齿轮啮合原理和轮齿的齿面方程,推导了齿轮形心的横向位移和齿轮扭转角之间的约束关系式.同时考虑齿轮啮合和不平衡效应,建立了直齿轮啮合转子-轴承系统的弯扭耦合动力学模型,分析了系统的弯扭耦合振动稳态响应. LI Runfang 等^[8]利用机械振动理论

和动力分析有限元法,研究了齿轮系统耦合振动的动力学建模问题,同时结合参数识别,对齿轮-传动轴-箱体系统在耦合振动条件下的动力学特性进行了全面分析.文献[9]应用拉格朗日方程,建立了一对渐开线直齿轮传动系统振动的数学模型,通过对系统中横向振动和扭转振动问题的分析,给出特定传动条件下的动态响应数值计算结果.通过前面的文献研究看出大多学者对考虑齿轮传动系统的弯扭耦合振动进行了大量的研究.但同时考虑齿轮轴的弯扭、滚动轴承的非线性特性、齿轮偏心等这些因素的文献很少.要想正确地分析和掌握此系统的动态特性,需建立完整的齿轮-转子-滚动轴承传动系统的动力学模型.

本文在前人研究的基础上,建立了齿轮-转子-滚动轴承传动系统非线性动力学模型,并对其进行了数值计算分析.研究了转速、偏心量、轴承游隙等参数变化对传动系统动力学特性的影响.

1 齿轮-转子-滚动轴承传动系统动力学模型

如图 1 所示,为齿轮-转子-滚动轴承传动系统的结构图,考虑输入/输出、轴承支承等因素的影响,建立如图 2 所示的弯扭耦合非线性振动模型.设齿轮处的当量质量分别为 m_1, m_2 , 相对于质心的转动惯量分别为 J_1, J_2 ; 滚动轴承(下文简称轴承)处的当量质量为 $m_{bi} (i=1 \sim 4)$, 输入端、

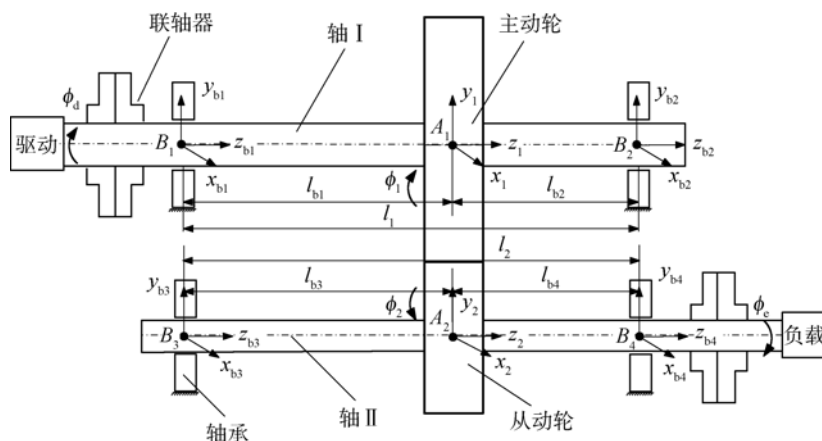


图 1 齿轮-转子-滚动轴承传动系统的静态模型

Fig. 1 Static model of gear-rotor-rolling bearing transmission system

输出端转动惯量分别为 J_d, J_e , 齿轮的偏心量为 $\rho_i (i=1, 2)$, 齿轮的传动比为 μ , 轴承处的非线性支承力为 $F_{xi}, F_{yi} (i=1 \sim 4)$.

1.1 建立系统动力学模型

图 1 所示的模型中, 在主/从动齿轮的理想中心 A_i 处建立固定坐标系 $A_i(x_i, y_i, z_i) (i=1, 2)$, 在轴承的理想中心 B_i 处建立固定坐标系 $B_i(x_i, y_i, z_i) (i=1 \sim 4)$. 坐标轴 x_i, x_{bi} 垂直于系统齿轮啮合线方向; y_i, y_{bi} 平行于系统齿轮啮合线方向; z_i, z_{bi} 位于轴承孔的理想中心线上. 设主/从动齿轮的旋转中心坐标为 $O_1(x_1, y_1), O_2(x_2, y_2)$, 齿轮质心坐标为 $G_1(x_{g1}, y_{g1}), G_2(x_{g2}, y_{g2})$. 主动齿轮的转角为 ϕ_1 , 扭转振动角位移为 θ_1 ; 从动齿轮的转角为 ϕ_2 , 扭转振动角位移为 θ_2 ; 输入端转角为 ϕ_d , 扭转振动角位移为 θ_d ; 输出端转角为 ϕ_e , 扭转振动角位移为 θ_e . ω_1, ω_2 分别为主/从动齿轮角速度. 据此建立整个传动系统的动力学模型, 如图 2 所示.

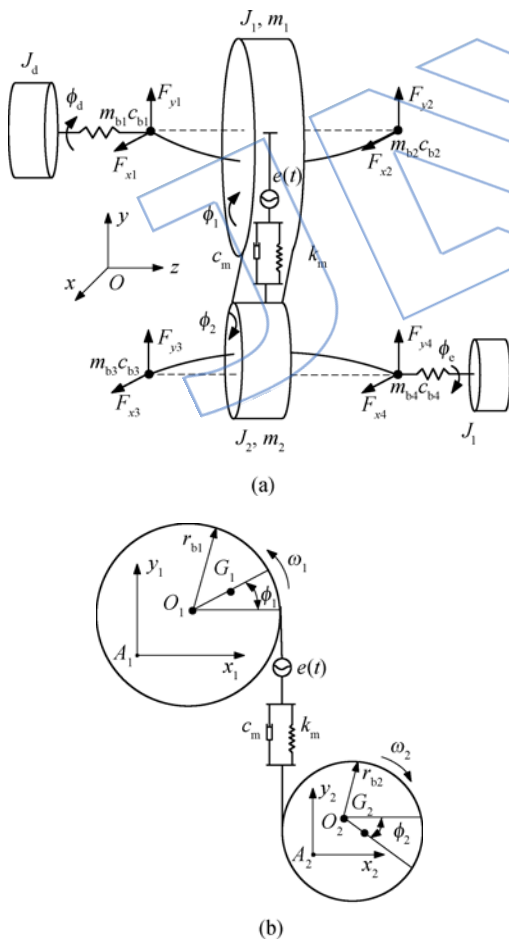


图 2 齿轮-转子-滚动轴承传动系统的动力学模型

Fig. 2 Dynamic model of gear-rotor-rolling bearing transmission system

根据前面定义的关系可知, 齿轮-转子系统中输入/出端, 主/从动齿轮的转角分别为

$$\begin{aligned} \phi_d &= \omega_1 t + \theta_d & \phi_1 &= \omega_1 t + \theta_1 \\ \phi_e &= \omega_2 t + \theta_e & \phi_2 &= \omega_2 t + \theta_2 \end{aligned} \quad (1)$$

式中 t 为时间.

规定, 在 $t=0$ s 时, 主/从动齿轮的起始转角都为 0 rad. 且从动齿轮的转动方向为正, 则齿轮质心 G_1, G_2 与齿轮旋转中心 O_1, O_2 之间的关系为

$$\begin{aligned} x_{g1} &= x_1 + \rho_1 \cos(-\phi_1) \\ y_{g1} &= y_1 + \rho_1 \sin(-\phi_1) \\ x_{g2} &= x_2 + \rho_2 \cos \phi_2 \\ y_{g2} &= y_2 - \rho_2 \sin \phi_2 \end{aligned} \quad (2)$$

$x_{bi}, y_{bi} (i=1 \sim 4)$ 为主/从轴上轴承处分别沿 x, y 方向的振动线性位移. 如图 2(a) 所示, 设 δ_{x1}, δ_{y1} 和 δ_{x2}, δ_{y2} 分别为齿轮旋转平面内主/从动轴在 x, y 方向的弹性变形, 则

$$\begin{aligned} \delta_{x1} &= x_1 - \xi_1 x_{b1} - \xi_2 x_{b2} \\ \delta_{y1} &= y_1 - \xi_1 y_{b1} - \xi_2 y_{b2} \\ \delta_{x2} &= x_2 - \xi_3 x_{b3} - \xi_4 x_{b4} \\ \delta_{y2} &= y_2 - \xi_3 y_{b3} - \xi_4 y_{b4} \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $\xi_i = l_{bi}/l_j$, ($i=1, 2, j=1; i=3, 4, j=2$); l_1, l_2 为主/从动轴在两轴承间的长度; $l_{bi} (i=1 \sim 4)$ 为主/从动轴上齿轮旋转中心到相应轴承质心的距离.

根据黏弹性理论, 齿轮间沿啮合线方向的啮合力可表述为 $F_m = c_m \dot{\delta} + k_m \delta$, 另外, 根据几何关系有 $\delta = y_1 - y_2 + \theta_1 r_{b1} - \theta_2 r_{b2} + \rho_1 \sin \phi_1 - \rho_2 \sin \phi_2$, 因此齿轮啮合时沿啮合线方向的动态啮合力 F_m 为

$$\begin{aligned} F_m &= c_m [\dot{y}_1 - \dot{y}_2 + \dot{\phi}_1 r_{b1} - \dot{\phi}_2 r_{b2} + \rho_1 \dot{\phi}_1 \cos \phi_1 - \\ &\quad \rho_2 \dot{\phi}_2 \cos \phi_2 - \dot{e}(t)] + k_m [y_1 - y_2 + \phi_1 r_{b1} - \\ &\quad \phi_2 r_{b2} + \rho_1 \sin \phi_1 - \rho_2 \sin \phi_2 - e(t)] \end{aligned}$$

式中 k_m 为齿轮啮合的综合啮合刚度; c_m 为齿轮啮合的综合啮合阻尼; r_{b1}, r_{b2} 为主/从动齿轮的基圆半径; $e(t)$ 为齿轮啮合误差, 可表示为

$$e(t) = e_0 + e_r \sin(\omega_e t + \phi_e) \quad (4)$$

式中 e_0, e_r 为啮合误差的均值和波动幅值. ϕ_e 为相位角, 其中 $\omega_e = 2\pi n_1 z_1 / 60$, n_1 为主动齿轮转速, z_1 为主动齿轮的齿数.

1.2 轴承振动分析模型

图 3 为轴承模型示意图^[14-15], 假设轴承的外圈固定在轴承座上, 内圈固定在旋转轴上. 这里设轴承中滚动体在内外滚道之间等距排列. 滚动体

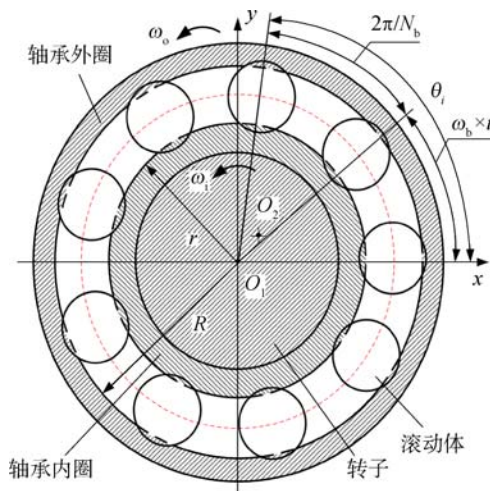


图3 滚动轴承模型

Fig. 3 Rolling bearing model

与轴承内、外圈接触点的线速度 v_i, v_o 为

$$v_i = \omega_i \cdot r \quad v_o = \omega_o \cdot R \quad (5)$$

式中 r, R 分别为轴承内外圈半径; ω_i, ω_o 分别为轴承内外圈角速度。

假设滚动体与内外圈之间为纯滚动,保持架的角速度等于滚动体的角速度

$$v_o = (v_o + v_i)/2 = (\omega_o R + \omega_i r)/2 \quad (6)$$

一般情况下,轴承的内圈与转轴固结一起转动,外圈与轴承座固结不转动, $\omega_o = 0, \omega_i = \omega$, 因此保持架的角速度 ω_b

$$\omega_b = 2v_o/(R+r) = \omega \cdot r/(R+r) \quad (7)$$

则第 i 个滚动体在时间 t 内的转动角度 θ_i

$$\theta_i = \omega_b \cdot t + 2\pi(i-1)/N_b \quad (8)$$

式中 N_b 为轴承滚动体数目。

设内圈中心产生振动位移分别为 x, y , 同时

假设轴承游隙为 γ_0 , 则第 i 个滚动体与滚道的法向接触变形量为

$$\delta_i = x \cos \theta_i + y \sin \theta_i - \gamma_0 \quad (9)$$

由非线性赫兹接触理论,可以得到由于滚动接触,第 i 个滚动体与滚道所产生的接触压力为 f_i , 同时考虑到滚动体与滚道间只能产生法向正压力,所以只有 $\delta_i > 0$ 时才有作用力

$$f_i = k_b (\delta_i)^{3/2} = k_b (x \cos \theta_i + y \sin \theta_i - \gamma_0)^{3/2} \cdot H(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i - \gamma_0) \quad (10)$$

式中 k_b 为赫兹接触刚度; $H(x)$ 为亥维塞函数。

轴承支承力 F 及其在 x, y 方向的分量分别为

$$F = \sum_{i=1}^{N_b} f_i = \sum_{i=1}^{N_b} [k_b (x \cos \theta_i + y \sin \theta_i - \gamma_0)^{3/2} \cdot H(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i - \gamma_0) \cos \theta_i] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} F_x &= \sum_{i=1}^{N_b} f_{ix} = F \cos \theta \\ F_y &= \sum_{i=1}^{N_b} f_{iy} = F \sin \theta \end{aligned} \quad (12)$$

1.3 建立系统动力学方程

啮合刚度取其平均啮合刚度,不考虑啮合齿侧隙、啮合摩擦力及啮合线位置的变化;沿齿面接触线上分布的动态啮合力 F_m 作用在齿宽中央^[16], 位移阵为

$$[\theta_d \quad x_1 \quad y_1 \quad \theta_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad \theta_2 \quad x_{b1} \quad y_{b1} \quad x_{b2} \quad y_{b2} \quad x_{b3} \quad y_{b3} \quad x_{b4} \quad y_{b4} \quad \theta_e]^T \quad (13)$$

式中 $x_i, y_i (i=1, 2)$ 为主/从动齿轮分别沿 x, y 方向的振动线位移,建立系统的动能 T 、势能 U 和耗散函数 R ,并由拉格朗日方程可推导出系统的动力学方程

$$\begin{aligned} J_d \ddot{\theta}_d + c_{d1} (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_1) + k_{d1} (\theta_d - \theta_1) &= T_d \\ m_1 \ddot{x}_1 + c_{s1} (\dot{x}_1 - \dot{\xi}_2 x_{b1} - \dot{\xi}_1 x_{b2}) + k_{s1} (x_1 - \xi_2 x_{b1} - \xi_1 x_{b2}) &= \\ m_1 \rho_1 \ddot{\theta}_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + m_1 \rho_1 (\omega_1 + \dot{\theta}_1)^2 \cos(\omega_1 t + \theta_1) &= \\ m_1 \ddot{y}_1 + c_{s1} (\dot{y}_1 - \dot{\xi}_2 y_{b1} - \dot{\xi}_1 y_{b2}) + k_{s1} (y_1 - \xi_2 y_{b1} - \xi_1 y_{b2}) &= \\ m_1 \rho_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) - m_1 \rho_1 (\omega_1 + \dot{\theta}_1)^2 \sin(\omega_1 t + \theta_1) - F_m - m_1 g &= \\ (J_1 + m_1 \rho_1^2) \ddot{\theta}_1 + c_{d1} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_d) + k_{d1} (\theta_1 - \theta_d) &= \\ m_1 \rho_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) \ddot{x}_1 + m_1 \rho_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) \ddot{y}_1 - F_m r_{b1} &= \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_{s2} (\dot{x}_2 - \dot{\xi}_4 x_{b3} - \dot{\xi}_3 x_{b4}) + k_{s2} (x_2 - \xi_4 x_{b3} - \xi_3 x_{b4}) &= \\ m_2 \rho_2 \ddot{\theta}_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2) + m_2 \rho_2 (\omega_2 + \dot{\theta}_2)^2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) &= \\ m_2 \ddot{y}_2 + c_{s2} (\dot{y}_2 - \dot{\xi}_4 y_{b3} - \dot{\xi}_3 y_{b4}) + k_{s2} (y_2 - \xi_4 y_{b3} - \xi_3 y_{b4}) &= \\ - m_2 \rho_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) + m_2 \rho_2 (\omega_2 + \dot{\theta}_2)^2 \sin(\omega_2 t + \theta_2) + F_m - m_2 g &= \\ (J_2 + m_2 \rho_2^2) \ddot{\theta}_2 + c_{d2} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_e) + k_{d2} (\theta_2 - \theta_e) &= m_2 \rho_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2) \ddot{x}_2 - m_2 \rho_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \ddot{y}_2 + F_m r_{b2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m_{b1} \ddot{x}_{b1} + c_{s1} \dot{\xi}_2 (-\dot{x}_1 + \dot{\xi}_2 \dot{x}_{b1} + \dot{\xi}_1 \dot{x}_{b2}) + c_{b,x1} \dot{x}_{b1} + k_{s1} \xi_2 (-x_1 + \xi_2 x_{b1} + \xi_1 x_{b2}) = F_{x1} \\
& m_{b1} \ddot{y}_{b1} + c_{s1} \dot{\xi}_2 (-\dot{y}_1 + \dot{\xi}_2 \dot{y}_{b1} + \dot{\xi}_1 \dot{y}_{b2}) + c_{b,y1} \dot{y}_{b1} + k_{s1} \xi_2 (-y_1 + \xi_2 y_{b1} + \xi_1 y_{b2}) = F_{y1} - m_{b1} g \\
& m_{b2} \ddot{x}_{b2} + c_{s1} \dot{\xi}_1 (-\dot{x}_1 + \dot{\xi}_2 \dot{x}_{b2}) + c_{b,x2} \dot{x}_{b2} + k_{s1} \xi_1 (-x_1 + \xi_2 x_{b1} + \xi_1 x_{b2}) = F_{x2} \\
& m_{b2} \ddot{y}_{b2} + c_{s1} \dot{\xi}_1 (-\dot{y}_1 + \dot{\xi}_2 \dot{y}_{b2}) + c_{b,y2} \dot{y}_{b2} + k_{s1} \xi_1 (-y_1 + \xi_2 y_{b1} + \xi_1 y_{b2}) = F_{y2} - m_{b2} g \\
& m_{b3} \ddot{x}_{b3} + c_{s2} \dot{\xi}_4 (-\dot{x}_2 + \dot{\xi}_4 \dot{x}_{b3} + \dot{\xi}_3 \dot{x}_{b4}) + c_{b,x3} \dot{x}_{b3} + k_{s2} \xi_4 (-x_2 + \xi_4 x_{b3} + \xi_3 x_{b4}) = F_{x3} \\
& m_{b3} \ddot{y}_{b3} + c_{s2} \dot{\xi}_4 (-\dot{y}_2 + \dot{\xi}_4 \dot{y}_{b3} + \dot{\xi}_3 \dot{y}_{b4}) + c_{b,y3} \dot{y}_{b3} + k_{s2} \xi_4 (-y_2 + \xi_4 y_{b3} + \xi_3 y_{b4}) = F_{y3} - m_{b3} g \\
& m_{b4} \ddot{x}_{b4} + c_{s2} \dot{\xi}_3 (-\dot{x}_2 + \dot{\xi}_4 \dot{x}_{b3} + \dot{\xi}_3 \dot{x}_{b4}) + c_{b,x4} \dot{x}_{b4} + k_{s2} \xi_3 (-x_2 + \xi_4 x_{b3} + \xi_3 x_{b4}) = F_{x4} \\
& m_{b4} \ddot{y}_{b4} + c_{s2} \dot{\xi}_3 (-\dot{y}_2 + \dot{\xi}_4 \dot{y}_{b3} + \dot{\xi}_3 \dot{y}_{b4}) + c_{b,y4} \dot{y}_{b4} + k_{s2} \xi_3 (-y_2 + \xi_4 y_{b3} + \xi_3 y_{b4}) = F_{y4} - m_{b4} g \\
& J_1 \ddot{\theta}_e + c_{t2} (\dot{\theta}_e - \dot{\theta}_2) + k_{t2} (\theta_e - \theta_2) = -T_e
\end{aligned} \quad (14)$$

式中 T_d 为输入端扭矩, T_e 为输出端扭矩; k_{s1}, k_{s2} 分别为输入、输出轴的弯曲刚度; k_{t1}, k_{t2} 分别为输入、输出轴的扭转刚度; $k_{b,xi}, k_{b,yi}$ 分别为轴承处沿 x, y 方向刚度; c_{s1}, c_{s2} 分别为输入、输出轴的弯曲阻尼; c_{t1}, c_{t2} 分别为输入、输出轴的扭转阻尼; $c_{b,xi}, c_{b,yi}$ 分别为轴承处沿 x, y 方向的阻尼。

由式(14)可知,这是具有 16 个自由度的 2 阶非线性微分方程组。方程中考虑了转轴的弯扭耦合作用。各项阻尼参数的确定参考文献[17]。

2 齿轮-转子-轴承弯扭耦合振动

从前面的推导过程和结果可以看出,轴承支承的齿轮-转子系统为一个非线性系统,加上齿轮啮合作用以及弯扭耦合作用,整个系统处于较为复杂的载荷环境,因此有必要对其进行详细的非线性动力学响应分析。本文以表 1 所示的参数为例进行动力参数计算。这里采用 Runge-Kutta 法对系统进行数值求解。

表 1 齿轮-转子-滚动轴承系统的结构和动力学参数

Table 1 Structure and dynamics parameters of gear-rotor-rolling bearing transmission system

齿轮			轴			轴承		
参数	符号	数值	参数	符号	数值	参数	符号	数值
齿轮齿数	z_1	100	弯曲刚度/ 10^8 (N/m)	k_{s1}	2.513	集中质量/kg	$m_{b1} = m_{b2}$	115.2
	z_2	25		k_{s2}	0.157		$m_{b3} = m_{b4}$	73.2
质量/kg	m_1	667.859	弯曲阻尼比	ξ_s	0.07	轴承刚度/ 10^{10} (N/m)	轴 1 $k_{b,xi} = k_{b,yi}$	6.0
	m_2	141.038		ξ_s	0.07		轴 2 $k_{b,xi} = k_{b,yi}$	2.0
转动惯量/ (kg · m ²)	J_1	44.355	扭转刚度/ 10^8 (N · m)/rad	k_{t1}	4.027	轴承阻尼比	ξ_b	0.01
	J_2	0.207		k_{t2}	0.254	轴承接触 刚度/ 10^9	k_{b1}	13.34
模数/mm	m	8	扭转阻尼比	ξ_t	0.07		k_{b2}	10.34
			输入转动惯量/ (kg · m ²)	J_d	17.883	轴承滚动 体个数	N_{b1}	14
偏心量/ 10^{-5} m	ρ_1	0.2					N_{b2}	10
	ρ_2	2.0	输出转动惯量/ (kg · m ²)	J_1	5.271	轴承 1、轴承 2 外半径/m	R_1	0.25
啮合刚度/ 10^8 (N/m)	k_m	6.0				轴承 1、轴承 2 内半径/m	r_1	0.20
	ξ_m	0.1	输入转速/ (r/min)	ω_1	500	轴承 3、轴承 4 外半径/m	R_2	0.125
啮合误差 均值/ 10^{-5} m	e_m	2		ω_2	2000		r_2	0.100
	e_r	3	输出转速/ (r/min)			轴承 3、轴承 4 内半径/m		
啮合误差 幅值/ 10^{-5} m						轴承游隙/ 10^{-6} m	γ_{01}	0.25
	ω_e	2000	齿轮处于 传动轴位置	$\xi_3 = \xi_4 = 0.5$			γ_{02}	0.50

首先对主动齿轮转速 $n_1 = 500$ r/min(从动齿轮转速 $n_2 = 2000$ r/min)工况下的系统振动响应进行计算。图 4 为主/从动齿轮和对应左轴承处的

平动方向的横向振动波形和频谱响应。从主动齿轮和轴承位置的振动波形可以看出,在齿轮和轴承处的 x, y 方向表现出不同的振动响应, y 方向

的振动幅值远大于 x 方向的振动幅值,另外 y 方向有非常明显的高频谐波成分,而 x 方向也表现出复杂的谐波特征. 对应于振动波形的主动齿轮和轴承位置的频谱分析(图 4(a2)~图 4(d2)),可以看出,在齿轮和轴承位置,相对于 x 方向, y 方向出现一个高频成分 f_m ,此频率为啮合频率 $n_1 \times z_1/60 = 833.3 \text{ Hz}$;由图 4(a2)在齿轮位置 x 方向出现较大幅值的轴承的变刚度频率 f_3 (45.8 Hz) 及其倍频成分 ($2f_3, 3f_3, \dots, 6f_3$),而在齿轮位置 y 方向除了啮合频率 f_m 外,同样出现了轴承的变刚度频率成分 f_3 和 $2f_3$,以及主动轴的转频成分 f_1 ($n_1/60 = 8.3 \text{ Hz}$) 和从动轴转频成分 f_2 ($n_2/60 = 33.3 \text{ Hz}$);在轴承处 x 方向出现了非常明显的 f_3 成分及其较强的倍频成分和微弱的

f_1 成分,而在轴承处的 y 方向除了 f_3 及其倍频成分外,还出现了较强的从动轴转频成分 f_2 、齿轮啮合频率 f_m 和较弱的主动轴转频 f_1 成分. 图 4(e1)~图 4(h1)为从动齿轮和轴承位置的振动波形,从图中可以看出从动轴的 x 方向和 y 方向振动幅值也有一定差距,这主要是由于直齿轮的啮合形式造成的,另外齿轮和轴承处的 y 方向也存在高频谐波成分,对应于主动轴的频率响应,从动轴的振动成分(图 4(e2)~图 4(h2))较为单一,特别是在齿轮处 x 方向仅有 f_2 成分,在齿轮处 y 方向则仅有 f_2 和 f_m 成分,而在轴承处则表现出较为丰富的频率特征,首先在 x, y 两方向均出现较大的 f_2 成分,另外还出现了较为明显的轴承的变刚度频率成分 f_4 (147.4 Hz),及其倍频成

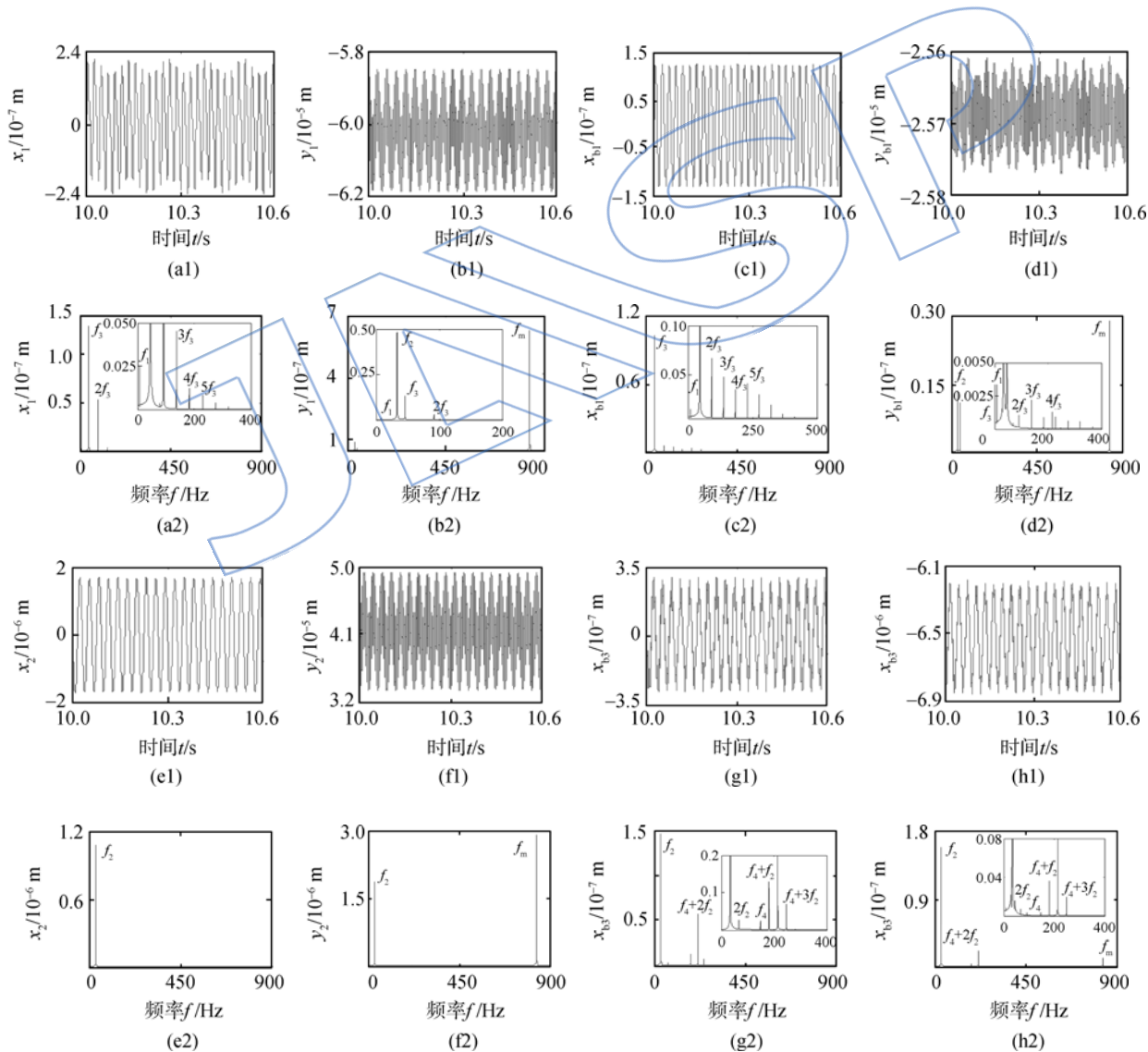


图 4 主/从动轮和轴承的横向振动波形及频谱图 ($n_1 = 500 \text{ r/min}$, $\rho_1 = 2.0 \times 10^{-6} \text{ m}$, $\rho_2 = 2.0 \times 10^{-5} \text{ m}$)

Fig. 4 Transverse vibration waveform and spectrum diagram of master/slave gears and bearings

($n_1 = 500 \text{ r/min}$, $\rho_1 = 2.0 \times 10^{-6} \text{ m}$, $\rho_2 = 2.0 \times 10^{-5} \text{ m}$)

分和组合频率成分(181, 214 Hz 等)。

图5为主/从动齿轮的扭转振动波形及频谱图,从波形图可以看出,主动齿轮的扭转振动值为负值,而从动齿轮则相反,这主要是由于齿轮的啮合作用方向决定的。另外由于扭转刚度的不同,小

齿轮的扭转振动幅值较大一些。在频域中两者均表现出两轴的转频成分和啮合频率成分;并且从动轴啮合频率成分幅值远大于主动轴,而两轴的转频成分幅值相差不大。

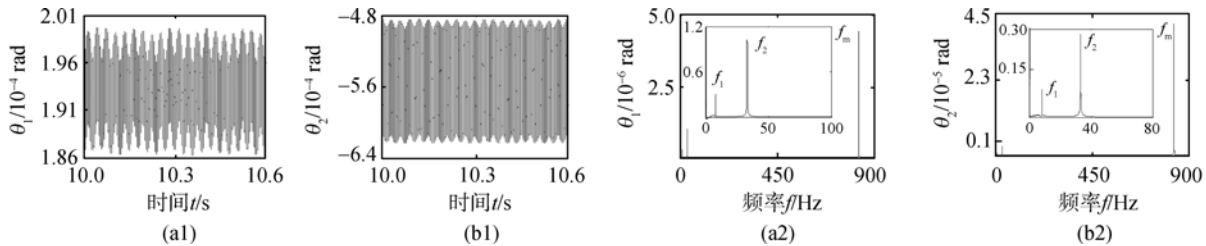


图5 主/从动齿轮的扭转振动波形及频谱图($n_1=500$ r/min, $\rho_1=2.0\times 10^{-6}$ m, $\rho_2=2.0\times 10^{-5}$ m)

Fig. 5 Torsional vibration waveform and spectrum diagram of master/slave gears

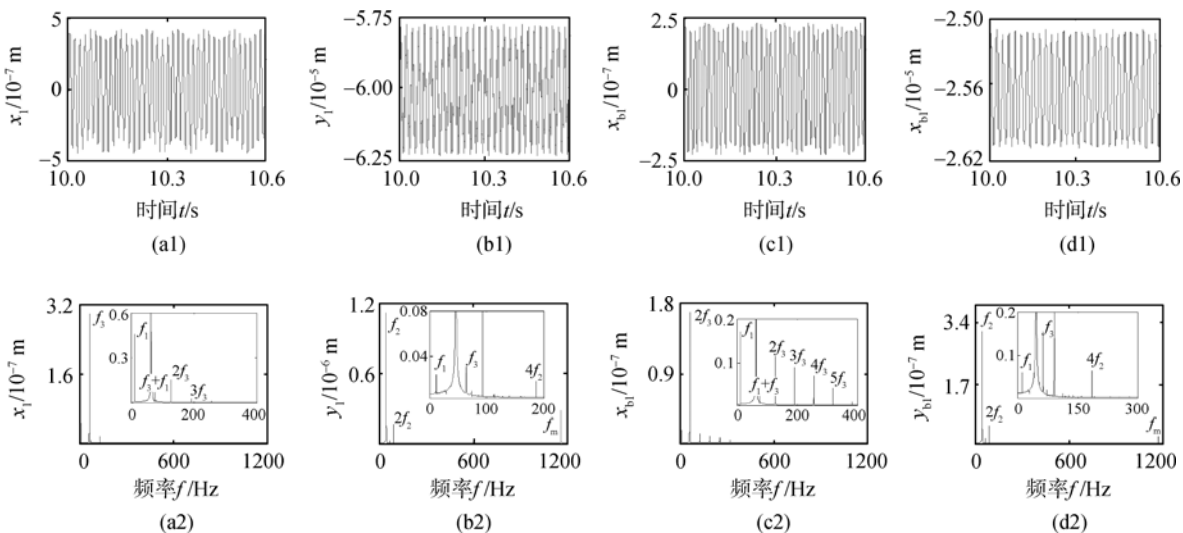
($n_1=500$ r/min, $\rho_1=2.0\times 10^{-6}$ m, $\rho_2=2.0\times 10^{-5}$ m)

由以上计算结果可以看出,由于弯扭耦合作用的影响,在扭转方向出现了两转轴横向振动的简谐频率成分(转频和啮合频率),并未出现轴承引起的变刚度频率成分。而在横向振动方向除了转频和啮合频率成分外,还出现了轴承引起的变刚度频率成分及组合频率成分,振动波形变得较为复杂。因此,有必要将各个参数对系统振动的影响开展深入研究。后面将对转速、齿轮偏心量和轴承游隙3个参数进行考察分析。

2.1 齿轮转速的影响

前面分析了主动齿轮转速为500 r/min时系统的振动响应。这里对主动齿轮转速 $n_1=700$ r/min时系统的振动响应进行计算。结果如图6、图7所示。对应于图4,从图6所示结果可以发现:由于转速的增大,主/从动齿轮各处振幅明显

变大,对于主动轴,y方向振幅增幅最为明显,各位置的振动波形也有明显改变,在频域中y方向从动轴的转频成分明显增大,而其本身的转频成分却越来越不明显,另外在轴承处的变刚度频率成分也越来越不明显。而对于从动轴而言,各处振动波形也发生了明显改变,转轴x方向依然只表现为原来的转频成分,而y方向的频率成分变化较为明显,除了啮合频率相对变弱之外,还出现了轴承的变刚度成分和主动轴的转频成分,轴承处x方向转频成分的倍频越来越明显,y方向则更为明显,且倍频成分振幅较大。可以看出转速的增大对于高速轴的影响最为明显。图7为主/从动齿轮的扭转振动波形及频谱图。对应于图5,从图7所示结果可以发现:随着转速的增大,主/从动齿轮各处的扭转振动幅值均明显变大。而在频域内,



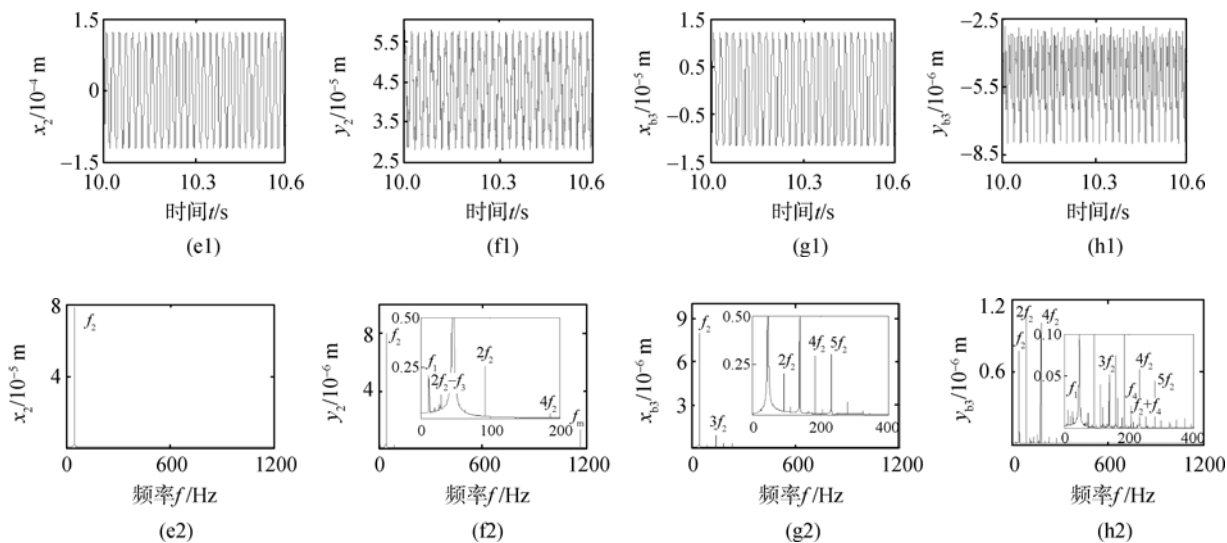


图 6 主/从动齿轮和轴承的横向振动波形及频谱图($n_1=700$ r/min, $\rho_1=2.0\times 10^{-6}$ m, $\rho_2=2.0\times 10^{-5}$ m)

Fig. 6 Transverse vibration waveform and spectrum diagram of master/slave gears and bearings

($n_1=700$ r/min, $\rho_1=2.0\times 10^{-6}$ m, $\rho_2=2.0\times 10^{-5}$ m)

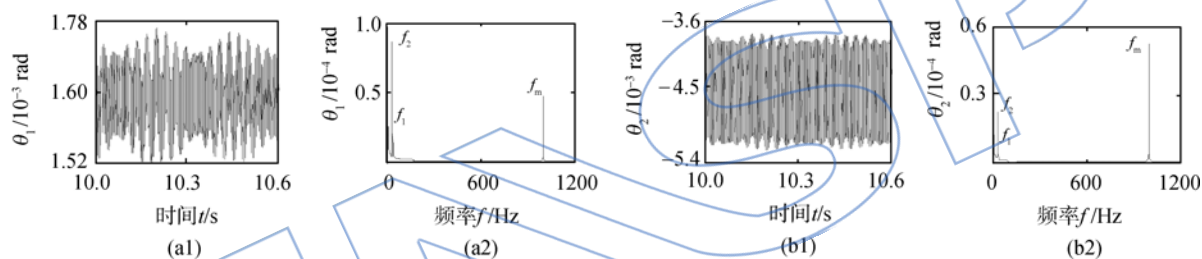


图 7 主/从动齿轮的扭转振动波形及频谱图($n_1=700$ r/min, $\rho_1=2.0\times 10^{-6}$ m, $\rho_2=2.0\times 10^{-5}$ m)

Fig. 7 Torsional vibration waveform and spectrum diagram of master/slave gears

($n_1=700$ r/min, $\rho_1=2.0\times 10^{-6}$ m, $\rho_2=2.0\times 10^{-5}$ m)

可以发现,由于转速的增大,转频成分幅值明显增大,并且在主动轴频谱中从动轴的转频成分较为明显,而在从动轴中正好相反。

前面对主动齿轮转速分别为 500 r/min 和 700 r/min 进行了对比分析. 为了更为全面地了解转速对整个传动系统的振动响应的影响. 图 8、图 9 给出了主/从动齿轮和轴承在 x 、 y 及 θ 方向的三维频谱图. 从图中可知:随着转速的增大,在 x 方向,主/从动齿轮和轴承处最明显的特征是在主动轴转速 $n_1=900$ r/min($n_2=3600$ r/min)时,变刚度频率 f_3 出现最大值,这说明对于轴承来讲也有其自身的谐振频率,在系统设计阶段需要注意. 在 y 方向(即啮合力方向),对于主动轴来讲,其转频表现并不明显,主要表现为从动轴转频成分(这和前面的计算结果是一致的),并且该转频成分随着转速的升高不断增大,而啮合频率成分随着转速的升高不断减小,主动轴上的轴承在 y 方向也表现出这一规律;而对于从动轴及其轴承的

y 方向响应表现较为复杂,首先其最主要的频率成分依然表现为其本身的转频成分,并且随着转速的升高先增大后减小,而啮合频率成分却不断减小,而在其轴承位置也表现出同样规律,不过除了其自身的转频成分外还出现更多的倍频成分,并且啮合频率成分并不明显. 从扭转方向的三维频谱图可以看出在两轴上均反映出两轴的转频成分和啮合频率成分,并且转频成分均呈现出先增大后减小的趋势,只是最大值的位置不同,主动轴啮合频率成分很快减小,而从动轴的啮合频率成分却不断增大. 因此,可以认为扭转振动和横向振动在高速轴承将会反映得更为明显。

2.2 偏心量的影响

在 2.1 节中分析了转速对系统响应的影响,这里重点研究偏心量对系统响应的影响. 首先将主/从动齿轮偏心量分别调整为原来的 2 倍. 系统的振动响应如图 10、图 11 所示. 对比图 4 和图 10,可以发现:随着主/从动齿轮偏心量的增大,

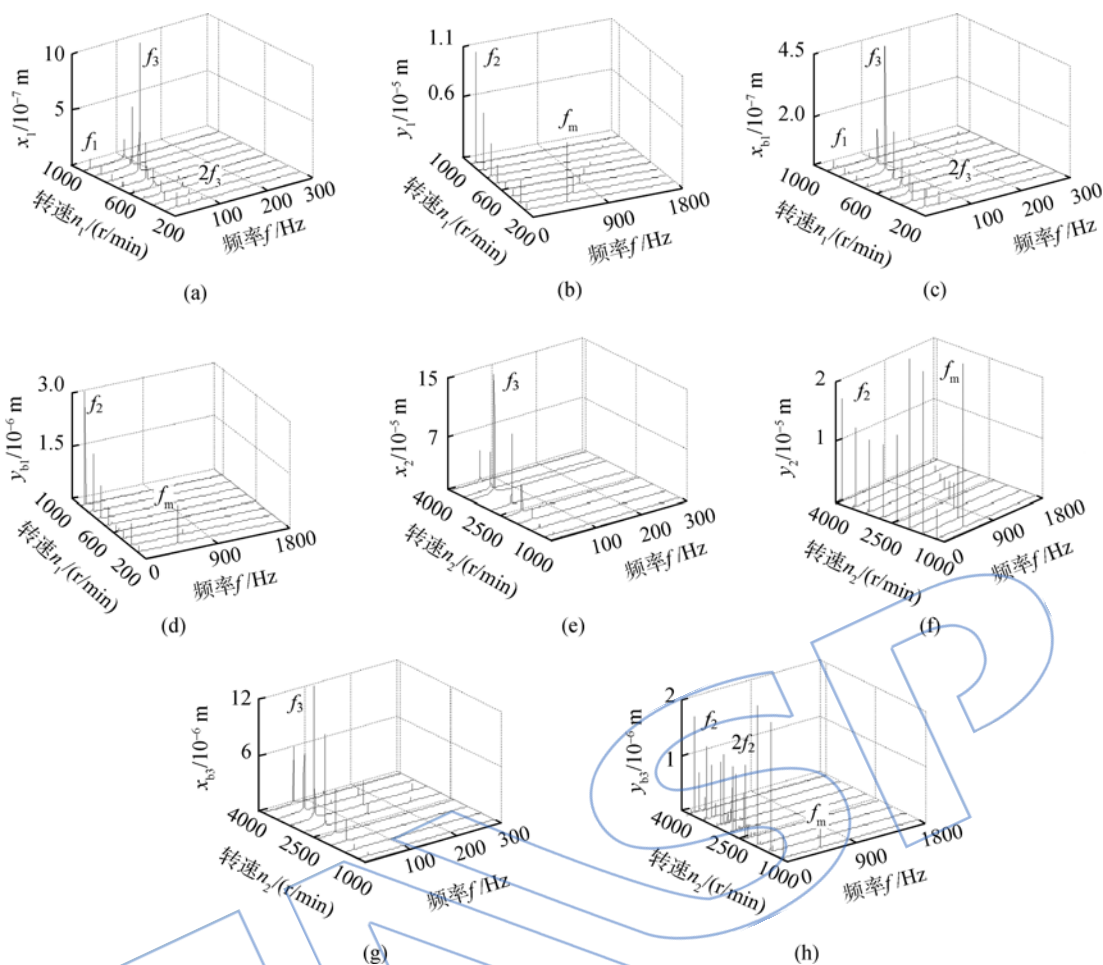


图 8 变转速条件下主/从动齿轮和轴承横向振动的三维频谱图

Fig. 8 Transverse vibration three-dimensional spectrum of master/slave gears and bearings with variable speeds

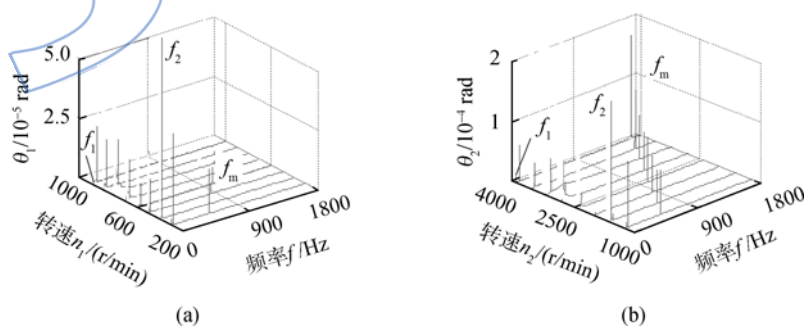
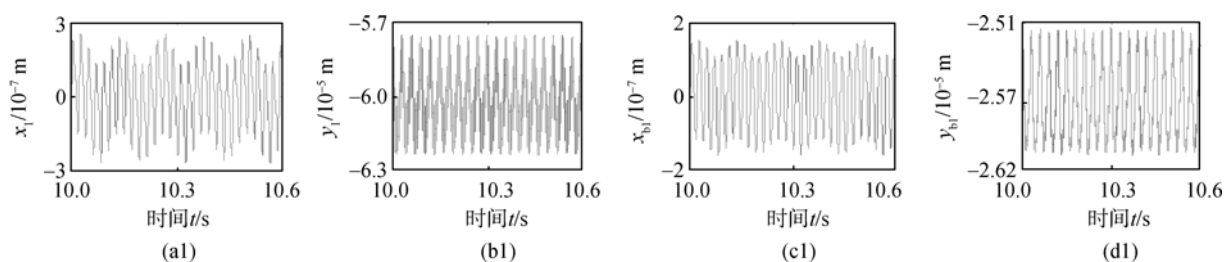


图 9 变转速条件下主/从动齿轮扭转振动的三维频谱图

Fig. 9 Torsional vibration three-dimensional spectrum of master/slave gears with variable speeds



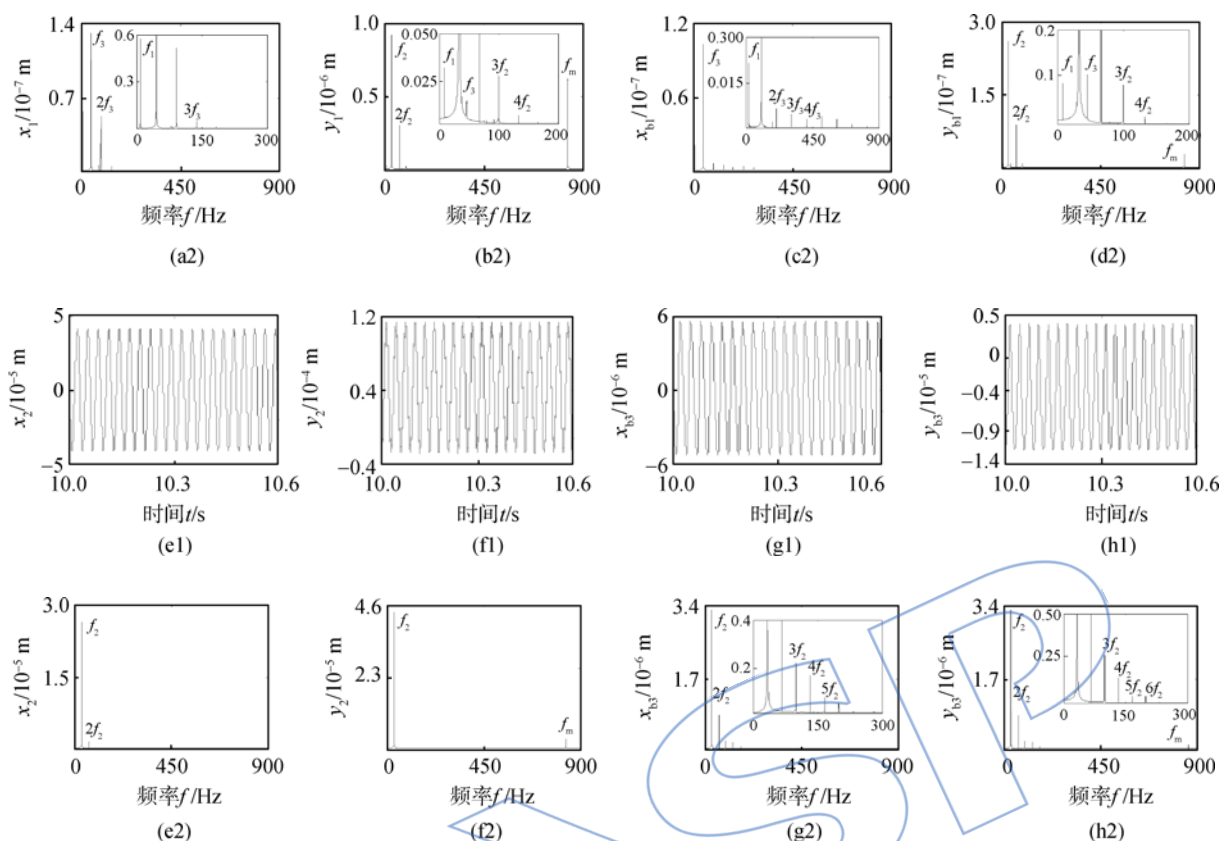


图 10 主/从动齿轮和轴承的横向振动波形及频谱图 ($n_1=500 \text{ r/min}$, $\rho_1=4.0 \times 10^{-6} \text{ m}$, $\rho_2=4.0 \times 10^{-5} \text{ m}$)

Fig. 10 Transverse vibration waveform and spectrum diagram of master/slave gears

($n_1=500 \text{ r/min}$, $\rho_1=4.0 \times 10^{-6} \text{ m}$, $\rho_2=4.0 \times 10^{-5} \text{ m}$)

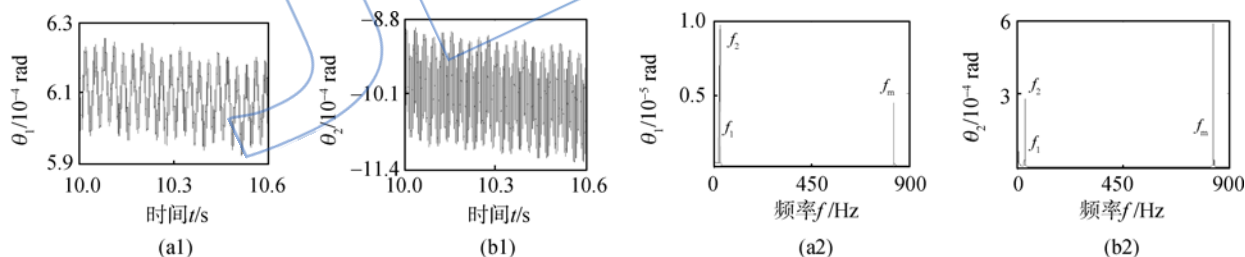


图 11 主/从动齿轮的扭转振动波形及频谱图 ($n_1=500 \text{ r/min}$, $\rho_1=4.0 \times 10^{-6} \text{ m}$, $\rho_2=4.0 \times 10^{-5} \text{ m}$)

Fig. 11 Torsional vibration waveform and spectrum diagram of master/slave gears

($n_1=500 \text{ r/min}$, $\rho_1=4.0 \times 10^{-6} \text{ m}$, $\rho_2=4.0 \times 10^{-5} \text{ m}$)

主/从动齿轮及轴承各处振幅明显变大,并且波形图有明显改变.从频域图的对比可以发现,对于主动轴(低速轴)在 x 方向集中频率成分基本不变,而 y 方向频域响应 f_3 (变刚度频率)几乎消失,而从动轴的 2 倍频成分在主动轴及其轴承处表现明显.对于从动轴,转轴和轴承处 x 方向的振动出现 2 倍转频,而在 y 方向由于偏心量的增大,转频及其倍频成分($2f_2, 3f_2, \dots$)表现更为明显.对应于图 5,从图 11 所示结果,可以发现由于主/从动齿轮偏心量的增大,主/从动齿轮各处的扭转振动

幅值均明显变大.另外,从频域图的对比可以发现:频率的成分没有变化,两转轴的转频成分幅值略有增大.而且在主动轴的频谱图中从动轴的转频成分幅值相对大些.

在 2.1 节和 2.2 节分别对主/从动齿轮偏心量为 $\rho_1=2.0 \times 10^{-6} \text{ m}$, $\rho_2=2.0 \times 10^{-5} \text{ m}$ 和 $\rho_1=4.0 \times 10^{-6} \text{ m}$, $\rho_2=4.0 \times 10^{-5} \text{ m}$ 两种工况下系统的振动响应进行了对比分析.为得到偏心量对系统响应的影响规律,图 12、图 13 给出了在主/从动齿轮 x, y, θ 以及轴承 x, y 方向随偏心变化的

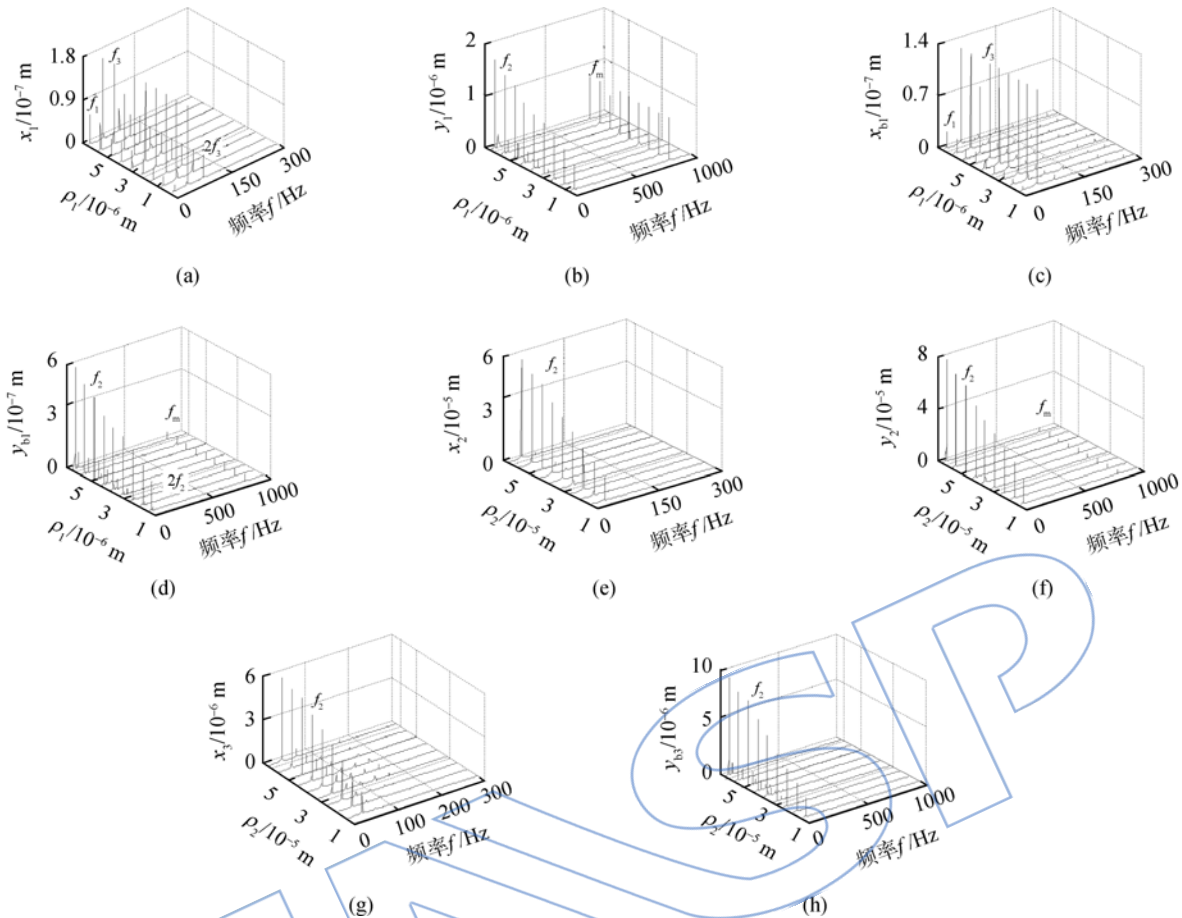


图 12 变偏心量条件下主/从动齿轮的轴承横向振动的三维频谱图

Fig. 12 Transverse vibration three-dimensional spectrum of master/slave gears and bearings with variable eccentric distances

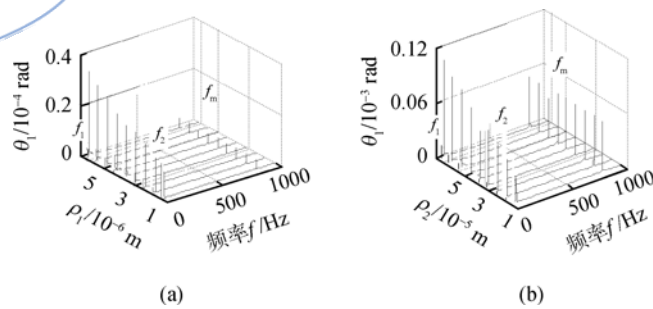


图 13 变偏心量条件下主/从动齿轮扭转振动的三维频谱图

Fig. 13 Torsional vibration three-dimensional spectrum of master/slave gears with variable eccentric distances

三维频谱图. 从图中可以发现: 随着主/从动齿轮的偏心量增大, 主/从动齿轮各处振动幅值发生明显变化, 但并不和偏心量成正比(这主要是由于轴承的非线性特性及系统阻尼造成的). 特别是在主动齿轮 x 方向, 随着偏心量的增大, 振动幅值略有波动, 但并不明显, 特别是轴承变刚度频率成分

f_3 幅值几乎不变. 而在 y 方向主/从动轴转频幅值随着偏心量的增大而逐渐增大, 而啮合频率成分幅值基本不变. 对于从动轴由于其较高的转速致使在频谱图中主要反映出其自身的转频成分, 并且该成分幅值随着偏心量的增大而增大, 而啮合频率在从动轴的频域中反映的并不明显. 对于

轴承而言,随着偏心量的增大,幅值变化情况和主/从动齿轮的变化情况类似,但轴承 y 方向 f_2 频率附近的倍频和随机成分却越来越多. 在扭转方向一直为主/从动轴的转频(f_1, f_2)和齿轮的啮合频率 f_m ,随着偏心量的增大,其幅值也逐渐增大,但同样以从动轴的频率和齿轮的啮合频率为主.

2.3 轴承游隙的影响

本节对轴承游隙的变化对系统的振动响应的影响进行考察分析. 由于该参数变化时所得到的时域响应特征和前面几种情况类似,鉴于篇幅所限,这里省略时域响应结果,而直接给出随该参数变化时系统关键位置的三维频谱响应结果. 如图 14、图 15 为主/从动齿轮在 x, y, θ 以及轴承 x, y 方向随轴承游隙参数变化时的三维频谱图. 从图中可发现:对于主动轴,在齿轮和轴承处 x 方向依然是本身轴承的变刚度频率占主要地位,其他成分相对较小;但是随着轴承游隙的增大,该成分的幅值先减小后增大;而在 y 方向从动轴转频成分和齿轮啮合频率均比较明显,只是在轴承处啮合频率幅值稍弱;在齿轮处随着轴承游隙的增大从动轴转频成分 f_2 幅值先减小后增大然后再减小,但这种趋势并不明显,而且随着轴承游隙的增

大,该轴 $2f_2$ 成分却不断增大;另外对于主动轴的啮合频率成分在 f_2 低值处也有减小迹象. 在主动轴的轴承处也有和齿轮处相同响应趋势,不过由于轴承的非线性特性,导致随着轴承游隙的增大,在 f_2 频率附近的倍频谱和随机频谱成分越来越明显. 对于从动轴(高速轴)而言,由于其较高的旋转速度致使在其本身及轴承的 x 和 y 方向均表现出强烈的转频成分. 尽管如此在 x 方向的频率幅值随着轴承游隙的不断增大也基本呈现出先减小后增大的趋势,并且随着轴承游隙的增大,倍频成分有越来越明显的趋势,在轴承处的变刚度频率 f_3 幅值逐渐增大,并且其 2 倍频也越来越大;对于从动齿轮处的 y 向振动的转频成分也在轴承游隙 $\gamma_{02} = 5.0 \times 10^{-6}$ mm 处出现最小值;在该轴的轴承处也出现该种现象,并且随着轴承游隙的增大频率 f_2 附近的倍频和随机成分逐渐明显. 对于两转轴的扭转振动而言,主动轴的扭转振动频谱中 f_2 频率成分随轴承游隙增大不断减小,而啮合频率成分基本不变化;而对于从动轴(高速轴),扭转振动频谱幅值基本不变. 从以上的结果可以发现:支承轴承的轴承游隙对系统的振动响应有着较大影响,选择合适的轴承游隙可减小齿轮轴的振动响应幅值、倍频和随机谱成分.

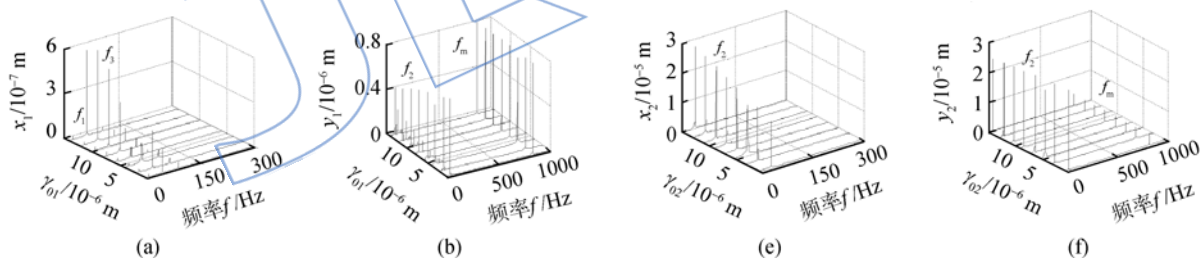


图 14 变轴承游隙条件下主/从动齿轮横向振动的三维频谱图

Fig. 14 Transverse vibration three-dimensional spectrum of master/slave gears with variable bearing clearances

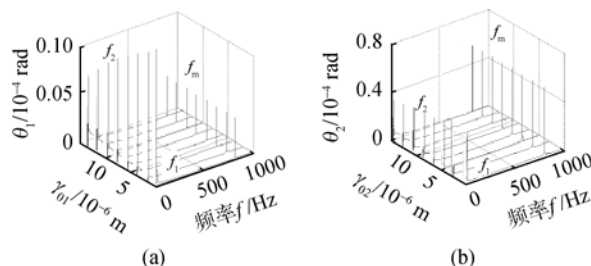


图 15 变轴承游隙条件下主/从动齿轮扭转振动的三维频谱图

Fig. 15 Torsional vibration three-dimensional spectrum of master/slave gears with variable bearing clearance

3 结 论

本文建立了 16 自由度的直齿轮传动系统弯扭耦合动力学模型, 考虑了轴承的非线性支承力的影响. 通过计算与分析, 得出转子系统弯扭耦合的非线性振动特征及系统振动响应规律.

由于弯扭耦合的作用, 在主动轴中有着非常明显的从动轴转频成分. 而在扭转振动中各轴转频和啮合频率则表现得更为清晰, 且这些频率随着转速的变化表现出不同的特征. 轴承有其自身的谐振频率, 在系统设计阶段需要注意避开轴承的变刚度频率对系统的影响.

随着齿轮偏心量增大, 齿轮处转频成分振动幅值越来越大, 并且轴承处的倍频和随机频率成分也越来越明显, 因此应尽量避免齿轮偏心现象的出现. 对选用轴承齿轮传动系统, 轴承游隙参数对系统的振动响应有着较大影响, 应选择合适的轴承游隙, 以减小齿轮轴的振动响应、倍频和随机谱成分的出现.

参考文献:

- [1] Lin H H, Huston R L, Coy J J. On dynamic loads in parallel shaft transmissions[J]. *Journal of Mechanisms Transmissions and Automation in Design*, 1988, 110(2): 221-229.
- [2] Lin H H. Dynamic loading of spur gear with linear or parabolic tooth profile modifications[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1994, 29(8): 1115-1129.
- [3] 唐增宝, 钟毅芳, 周建荣. 直齿圆柱齿轮传动系统的振动分析计算[J]. *华中理工大学学报*, 1993, 21(4): 44-49. TANG Zengbao, ZHONG Yifang, ZHOU Jianrong. A vibration analysis for a spur gear transmission system[J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology*, 1993, 21(4): 44-49. (in Chinese)
- [4] Lund J W. Critical speed, stability and response of a geared train of rotors[J]. *Journal of Mechanical Design*, 1978, 100(3): 535-538.
- [5] Iida H, Tamura A, Kiluchi K, et al. Coupled torsional-flexural vibration of a shaft in a geared system of rotors[J]. *Bulletin of JSME*, 1980, 23(186): 2111-2117.
- [6] 夏伯乾, 虞烈, 谢友柏. DH 型压缩机齿轮-轴承-转子系统动力学分析[J]. *振动工程学报*, 2003, 16(2): 251-225. XIA Boqian, YU Lie, XIE Youbo. Dynamics analysis of geared rotor-bearing system of DH type turbine compressor[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2003, 16(2): 251-225. (in Chinese)
- [7] 李明, 胡海岩. 完整约束下齿轮啮合转子系统的弯扭耦合振动稳态响应[J]. *振动工程学报*, 2003, 16(1): 79-84. LI Ming, HU Haiyan. Steady state response of the coupled lateral-torsional vibrations of geared rotor system under a holonomic constraint[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2003, 16(1): 79-84. (in Chinese)
- [8] LI Runfang, LIN Tengjiao, TAO Zeguang, et al. Study on coupled vibration response of gear system[C]// *Proceedings of the JSME International Conference on Motion and Power Transmission*. Fukuoka: JSME, 2001: 97-101.
- [9] 孙月海, 张策, 潘凤章. 直齿圆柱齿轮传动系统振动的动力学模型[J]. *机械工程学报*, 2000, 36(8): 47-50. SUN Yuehai, ZHANG Ce, PAN Fengzhang. Dynamic model of a spur gear transmission system vibration[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2000, 36(8): 47-50. (in Chinese)
- [10] Maliha R, Dogruer C U, Özgüven H N. Nonlinear dynamic modeling of gear shaft-disk-bearing systems using finite elements and describing functions[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2004, 126(3): 534-541.
- [11] Lee A S, Ha J W. Prediction of maximum unbalance responses of a gear-coupled two-shaft rotor-bearing system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 283(3): 507-523.
- [12] Li M, Yu L. Analysis of the coupled lateral torsional vibration of a rotor-bearing system with a misaligned gear coupling[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 243(2): 283-300.
- [13] 张策. 机械动力学[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [14] 陈果. 转子-滚动轴承-机匣耦合系统的不平衡-碰摩耦合故障非线性动力学响应分析[J]. *航空动力学报*, 2007, 22(10): 1771-1778. CHEN Guo. Nonlinear dynamic response analysis of unbalance-rubbing coupling faults of rotor-ball bearing-stator coupling system[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2007, 22(10): 1771-1778. (in Chinese)
- [15] 唐云冰, 高德平, 罗贵火. 航空发动机高速滚珠轴承力学特性分析与研究[J]. *航空动力学报*, 2006, 21(2): 354-360. TANG Yunbing, GAO Deping, LUO Guihuo. Research of aero-engine high-speed ball bearing[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2006, 21(2): 354-360. (in Chinese)
- [16] 窦唯, 张楠, 刘占生. 高速齿轮转子系统弯扭耦合振动研究[J]. *振动工程学报*, 2011, 24(4): 385-393. DOU Wei, ZHANG Nan, LIU Zhansheng. The coupled bending and torsional vibrations of the high-speed geared rotor-bearing system[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2011, 24(4): 385-393. (in Chinese)
- [17] Omar F K, Moustafa K A F, Emam S. Mathematical modeling of gearbox including defects with experimental verification[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2012, 18(9): 1310-1321.